



Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE  
Introducción al Álgebra 12-1

### Control 4

**P1.** Sea  $n \in \mathbb{N}$  un natural cualquiera. Se define, para todo  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$S_j = \sum_{k=0}^n k^j.$$

(a) (4,0 pts.) Demuestre que

$$\sum_{l=0}^j \binom{j+1}{l} S_l = (n+1)^{j+1}.$$

(b) (2,0 pts.) Use (a) para probar que

$$S_j = \frac{(n+1)^{j+1} - \sum_{l=0}^{j-1} \binom{j+1}{l} S_l}{j+1}.$$

**P2.** a) (3,0 pts.) Sea  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 1$ . Calcule

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \left( k + \frac{2^j}{j} \right).$$

*Indicación:* Puede usar resultados de sumas conocidas.

b) (3,0 pts.) Demuestre que el conjunto de todos los triángulos cuyos vértices son elementos de  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  es numerable.

Consultas sólo al auxiliar  
Justifique cada uno de sus pasos  
Tiempo: 1:15